ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΥΝΕΧΩΝ ΜΕΣΩΝ
ΛΥΣΕΙΣ
3 Σεπτεμβρίου 2013
Χάρης Σκόκος

---

1) Το πεδίο ταχυτήτων συνεχούς μέσου δίνεται από τις σχέσεις

$$u_1 = \frac{x_1}{1+t}, \quad u_2 = \frac{2x_2}{1+t}, \quad u_3 = \frac{3x_3}{1+t}.$$

Να βρεθούν οι συνιστώσες της επιτάχυνσης συναρτήσει των μεταβλητών
α) (1 μονάδα) του Euler, και
β) (1 μονάδα) του Lagarnge.
γ) (0,5 μονάδες) Οι εξισώσεις των τροχιών των σωματιδίων.

Λύση: α) Για την εύρεση των συνιστωσών της επιτάχυνσης χρησιμοποιούμε τις σχέσεις

$$\alpha_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \vec{u}\vec{\nabla} u_i$$

Επομένως έχουμε

$$\alpha_1 = \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}u_2 + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}u_3 = -\frac{x_1}{(1+t)^2} + \frac{x_1}{1+t}\frac{1}{1+t} + 0 + 0 = 0$$

Ομοίως βρίσκουμε

$$\alpha_2 = \frac{2x_2}{(1+t)^2}, \quad \alpha_3 = \frac{6x_3}{(1+t)^2}.$$

β) Από την έκφραση του πεδίου ταχυτήτων έχουμε

$$u_1 = \frac{dx_1}{dt} = \frac{x_1}{1+t} \Rightarrow \frac{dx_1}{x_1} = \frac{dt}{1+t} \Rightarrow \ln x_1 = \ln(1+t) + c_1 \Rightarrow x_1 = c(1+t).$$

Όμως για $t=0$ έχουμε $x_1 = \xi^1$ επομένως $c = \xi^1$, και τελικά βρίσκουμε $x_1 = \xi^1(1+t)$. Εργαζόμενοι με ανάλογο τρόπο βρίσκουμε $x_2 = \xi^2(1+t)^2$, $x_3 = \xi^3(1+t)^3$ Αντικαθιστώντας αυτές τις σχέσεις στα αποτελέσματα του ερωτήματος α) βρίσκουμε τις συνιστώσες της επιτάχυνσης συναρτήσει των μεταβλητών του Lagarnge

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 2\xi^2, \quad \alpha_3 = 6(1+t)\xi^3.$$

γ) Απαλείφοντας το χρόνο από τις σχέσεις $x_1 = \xi^1(1+t)$, $x_2 = \xi^2(1+t)^2$, $x_3 = \xi^3(1+t)^3$ βρίσκουμε ότι οι τροχιές περιγράφονται από τις εξισώσεις

$$x_1^2 = \frac{(\xi^1)^2}{\xi^2}x_2, \quad x_1^3 = \frac{(\xi^1)^3}{\xi^3}x_3.$$

2) Η κίνηση συνεχούς μέσου καθορίζεται από τις σχέσεις

$$x = a + \frac{e^{-b\lambda}}{\lambda}\sin\left[\lambda(a+\omega t)\right], \quad y = -b - \frac{e^{-b\lambda}}{\lambda}\cos\left[\lambda(a+\omega t)\right], \quad z = \xi^3,$$

όπου a, b, λ, ω σταθερές. Να δειχθεί ότι
α) (1 μονάδα) οι τροχιές είναι κύκλοι, και
β) (1 μονάδα) το μέτρο της ταχύτητας είναι σταθερό.
γ) (0,5 μονάδες) Να βρεθεί η σχέση μεταξύ των ξ^1, ξ^2 και a, b, λ.

Λύση: α) Από τις σχέσεις που μας δίνονται βρίσκουμε εύκολα ότι

$$(x-a)^2 + (y+b)^2 = \frac{e^{-2b\lambda}}{\lambda^2}\left\{\sin^2\left[\lambda(a+\omega t)\right] + \cos^2\left[\lambda(a+\omega t)\right]\right\} = \frac{e^{-2b\lambda}}{\lambda^2}.$$

Η σχέση αυτή μας λέει ότι οι τροχιές είναι κύκλοι στο επίπεδο $z = \xi^3$ με κέντρο $(a, -b)$ και ακτίνα $\sqrt{e^{-2b\lambda}/\lambda^2}$.
β) Οι συνιστώσες της ταχύτητας είναι

$$\begin{aligned} u_x = \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_{\xi^i} &= \omega e^{-b\lambda}\cos\left[\lambda(a+\omega t)\right] \\ u_y = \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{\xi^i} &= \omega e^{-b\lambda}\sin\left[\lambda(a+\omega t)\right] \\ u_z = \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_{\xi^i} &= 0. \end{aligned}$$

Το μέτρο της ταχύτητας δίνεται από τη σχέση

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} = \sqrt{\omega^2 e^{-2b\lambda}}$$

οπότε βλέπουμε ότι είναι σταθερό.
γ) Τη χρονική στιγμή $t = 0$ έχουμε $x = \xi^1$, $y = \xi^2$, $z = \xi^3$. Άρα από τις αρχικές εξισώσεις της εκφώνησης βρίσκουμε

$$\xi^1 = a + \frac{e^{-b\lambda}}{\lambda}\sin(\lambda a), \quad \xi^2 = -b - \frac{e^{-b\lambda}}{\lambda}\cos(\lambda a).$$

3) Για την περίπτωση απειροστής παραμόρφωσης συνεχούς μέσου να
α) (1,5 μονάδες) εκφραστεί ο συντελεστής σχετικής επιμήκυνσης $l_{\vec{n}}$ σε κάποιο σημείο A του μέσου κατά μήκος της διεύθυνσης που καθορίζεται από το μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{n} = n_1\vec{e}_1 + n_2\vec{e}_2 + n_3\vec{e}_3$ συναρτήσει των ανεξάρτητων στοιχείων του τανυστή παραμόρφωσης.
β) (1 μονάδα) Να αποδείξετε ποια είναι η μέγιστη και ποιά η ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει ο συντελεστής σχετικής επιμήκυνσης $l_{\vec{n}}$.

Λύση: Παράγραφος §23 (σελ.73-74) από το βιβλίο των Ι.Δ. Χατζηδημητρίου και Γ.Δ. Μπόζη 'Εισαγωγή στη Μηχανική των Συνεχών Μέσων'.

4) Η παραμόρφωση συνεχούς μέσου δίνεται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + a(x_3^2 + x_2 x_3) \\ x_2' &= x_2 + a(x_1^2 + x_3 x_1) \\ x_3' &= x_3 + a(x_2^2 + x_1 x_2) \end{aligned}$$

όπου $0 < a \ll 1$.
α) (0,5 μονάδες) Να εξεταστεί αν η παραμόρφωση είναι απειροστή ή πεπερασμένη και να βρεθεί ο τανυστής παραμόρφωσης.
β) (1 μονάδα) Ποιον προσανατολισμό πρέπει να έχει μικρός κύβος ακμής b με μια κορυφή του στο σημείο $A(1,-1,-1)$ ώστε να μετασχηματιστεί μετά την παραμόρφωση σε ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο; Να βρεθούν τα μήκη των πλευρών αυτού του παραλληλεπίπεδου.
γ) (1 μονάδα) Ποια είναι η μεταβολή του όγκου του κύβου κατά την παραμόρφωση;

Λύση: α) Τα διανύσματα μετατόπισης δίνονται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} w_1 &= x_1' - x_1 = a(x_3^2 + x_2 x_3) = a w_1' \\ w_2 &= x_2' - x_2 = a(x_1^2 + x_3 x_1) = a w_2' \\ w_3 &= x_3' - x_3 = a(x_2^2 + x_1 x_2) = a w_3' \end{aligned}$$

Μια παραμόρφωση είναι απειροστή όταν $\dfrac{\partial w_i}{\partial x_j} \ll 1$. Από τις παραπάνω σχέσεις βλέπουμε ότι $\dfrac{\partial w_i}{\partial x_j} = a\dfrac{\partial w_i'}{\partial x_j} = ak \ll 1$ διότι $k = \dfrac{\partial w_i'}{\partial x_j}$ είναι πεπερασμένος αριθμός. Επομένως η παραμόρφωση είναι απειροστή.

Στην περίπτωση απειροστής παραμόρφωσης τα στοιχεία του τανυστή παραμόρφωσης δίνονται από τις σχέσεις $\epsilon_{ij} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial w_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial w_j}{\partial x_i}\right]$. Οπότε ο τανυστής παραμόρφωσης είναι:

$$(\epsilon_{ij})_{(x_1,x_2,x_3)} = \begin{pmatrix} 0 & a(x_1+x_3) & a(x_2+x_3) \\ a(x_1+x_3) & 0 & a(x_1+x_2) \\ a(x_2+x_3) & a(x_1+x_2) & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

β) Ο τανυστής παραμόρφωσης για το σημείο $A(1,-1,-1)$ είναι

$$(\epsilon_{ij})_A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2a \\ 0 & 0 & 0 \\ -2a & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Για να μην χαθεί η καθετότητα των ακμών του κύβου κατά την παραμόρφωση αυτές θα πρέπει να είναι παράλληλες προς τις διευθύνσεις που καθορίζονται από τα ιδιοανύσματα του πίνακα (2). Οι ιδιοτιμές του πίνακα βρίσκονται από την εξίσωση

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -2a \\ 0 & -\lambda & 0 \\ -2a & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\lambda\left[\lambda^2 - (2a)^2\right] = 0 \Rightarrow -\lambda(\lambda-2a)(\lambda+2a) = 0,$$

και είναι

$$\lambda_1 = 2a, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = -2a. \tag{3}$$

Το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = 2a$ βρίσκεται από τη λύση του συστήματος

$$\begin{pmatrix} -2a & 0 & -2a \\ 0 & -2a & 0 \\ -2a & 0 & -2a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} -2ax_1 - 2ax_3 = 0 \\ -2ax_2 = 0 \\ -2ax_1 - 2ax_3 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x_1 \in \mathbb{R} \\ x_3 = -x_1 \\ x_2 = 0 \end{array} \right. .$$

Θέτοντας αυθαίρετα $x_1 = 1$ παίρνω ένα ιδιοδιάνυσμα της μορφής

$$\vec{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Δουλεύοντας αντίστοιχα και για τις 2 άλλες ιδιοτιμές βρίσκουμε τα ιδιοδιανύσματα

$$\vec{X}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

$$\vec{X}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Τα 3 αυτά ιδιοδιανύσματα είναι κάθετα μεταξύ τους, αφού τα εσωτερικά τους γινόμενα είναι μηδέν. Οι πλευρές του παραλληλεπίπεδου μετά την παραμόρφωση θα είναι

$$\begin{aligned} S_1 = (1+\lambda_1)b = (1+2a)b > b, &\quad \text{διαστολή} \\ S_2 = (1+\lambda_2)b = (1+0)b = b, &\quad \text{καμία μεταβολή} \\ S_3 = (1+\lambda_3)b = (1-2a)b > b, &\quad \text{συστολή} \end{aligned}$$

γ) Στην περίπτωση απειροστής παραμόρφωσης ο συντελεστής κυβικής διαστολής θ ισούται με το ίχνος του ο τανυστή παραμόρφωσης (2)

$$\theta = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0. \tag{7}$$

Άρα ο όγκος δεν θα μεταβληθεί.